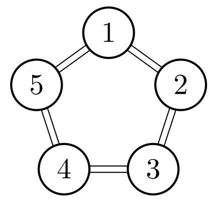
# Devoir maison n° 11

À rendre le mardi 20 janvier

Extrait d'un rapport du jury du CCINP : « *Le futur candidat doit s'appliquer à donner tous les arguments, même simples, conduisant à une conclusion. Nous lui conseillons de s'approprier petit à petit le cours par la pratique des exercices et des problèmes, de travailler les techniques habituelles et surtout de s'entraîner régulièrement à rédiger des questions de manière claire, explicite et structurée.* »

**Exercice 1.** (*d'après Centrale TSI 2016*)




Deux personnes sont perdues dans un labyrinthe composé de cinq pièces disposées comme indiqué sur la figure ci-contre. Chaque pièce est reliée aux deux pièces voisines par un couloir. Les couloirs sont représentés par les segments du dessin.
À l'instant $n = 0$, les deux personnes se situent dans deux pièces voisines (par exemple les pièces 1 et 2). Elles partent alors à la recherche l'une de l'autre selon les règles suivantes :

- à partir d'une pièce, chacune peut aller dans l'une ou l'autre des deux pièces voisines, les deux possibilités étant de probabilité $1/2$ ;
- les déplacements des deux personnes se font simultanément ;
- les choix des déplacements sont indépendants les uns des autres ;
- on suppose que les deux personnes ne peuvent ni se retrouver ni se voir dans les couloirs qui relient entre elles les différentes pièces ;
- les deux personnes se déplacent jusqu'à se retrouver dans une même pièce ; une fois qu'elles se sont retrouvées, elles restent ensemble lors de leurs déplacements futurs.

Pour tout entier naturel $n$, on note :

- $A_n$ l'événement « les deux personnes sont dans la même pièce après $n$ déplacements » et $a_n = P(A_n)$ ;
- $B_n$ l'événement « les deux personnes sont dans des pièces voisines (par exemple les pièces 1 et 2 ou les pièces 1 et 5) après $n$ déplacements » et $b_n = P(B_n)$ ;
- $C_n$ l'événement « les deux personnes sont dans des pièces non voisines (par exemple les pièces 1 et 3 ou les pièces 1 et 4) après $n$ déplacements » et $c_n = P(C_n)$.

1. Donner les valeurs de $a_0$, $b_0$ et $c_0$.
2. Soit $n$ un entier naturel. Donner les probabilités conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(A_{n+1})$ et $P_{C_n}(A_{n+1})$. On justifiera précisément à l'aide des règles décrites ci-dessus.
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{4}c_n$.
4. Donner, sans justification, une expression de $c_{n+1}$ en fonction de $a_n$, $b_n$ et $c_n$.
   On admet que l'on obtient de façon analogue que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \dfrac{3}{4}b_n + \dfrac{1}{4}c_n$.
5. On note $u_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $A$ telle que la relation $u_{n+1} = Au_n$ soit vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. On se propose de déterminer l'expression des trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 suivante :
   $$b_{n+2} = \frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{5}{16}b_n.$$

(b) En déduire l'expression de $b_n$ en fonction de $n$.
*Indication : oui, je vous l'accorde, les calculs sont un peu pénibles.*
On admet que, grâce à ce résultat et à Q4, on obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \frac{-1}{\sqrt{5}}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^n.$$

(c) Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles convergentes ? Si oui, préciser leurs limites et en donner une interprétation.

7. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n$ l'événement : « les deux personnes se retrouvent pour la première fois après $n$ déplacements ».
   (a) Justifier que $P(R_0) = P(R_1) = 0$.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $R_n$ en fonction de $A_n$ et $C_{n-1}$.
   (c) En déduire l'expression de $P(R_n)$ en fonction de $n$.

*Dans le sujet original, on introduisait une variable aléatoire et on montrait après un calcul très pénible qu'il fallait en moyenne* 12 *déplacements pour que les deux personnes se retrouvent.*

**Exercice 2. ★**
On range $n$ boules dans $n$ boîtes. Déterminer la probabilité $\pi_n$ qu'une seule boîte soit vide. Donner un équivalent de $\pi_n$ lorsque $n \to +\infty$.